ESTRATEGIAS PARA INTRODUCIR A LOS ALUMNOS EN LA MODELIZACION MATEMATICA

Mabel Susana Chrestia – María de la Trinidad Quijano
mchrestia@unrn.edu.ar – mquijano@unrn.edu.ar
Universidad Nacional de Río Negro – República Argentina

Tema: Bloque II.1 : La Resolución de Problemas como Herramienta para la
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel Educativo: Terciario
Modelización Matemática.
Palabras clave: Modelización matemática – Resolución de problemas – Competencias

Resumen

En este trabajo realizamos una introducción de la modelización matemática, explicando el proceso de modelización y el concepto de modelo matemático; y de las competencias en educación. Luego relacionamos ambos temas, centrándonos en la competencia "modelizar". A continuación, proponemos algunos pasos a seguir para introducir la modelización en el aula y relatamos una experiencia, cuya finalidad fue, mediante la resolución de dos situaciones problemáticas, presentar a los alumnos los modelos lineales y cuadráticos. Por último, enumeramos algunas conclusiones, en las que comentamos ventajas y dificultades al momento de llevar la modelización al aula.

Introducción

Quienes escribimos este artículo conformamos la cátedra de la asignatura "Matemática 1", la cual se dicta para la carrera de Licenciatura en Economía de la Universidad Nacional de Río Negro, en la ciudad de San Carlos de Bariloche. En el programa de la asignatura, entre los objetivos propuestos, uno de los más importantes es "*que los alumnos desarrollen la habilidad de razonar matemáticamente para lograr construir modelos matemáticos que les permitan resolver e interpretar problemas sobre cuestiones económicas y administrativas*." La inclusión de este objetivo se debe a que, por las características mismas de la carrera y en las asignaturas de los años posteriores, se hace necesario que los alumnos tengan desarrollada esta capacidad.

En nuestra materia intentamos que los alumnos apliquen los conceptos vistos para resolver situaciones problemáticas "cuasi-reales" o reales en su totalidad. Venimos trabajando con esta metodología desde hace dos años, y los resultados han sido positivos.

Notamos ahora que, aunque implícitamente hemos introducido la modelización matemática a lo largo de la materia, falta aún hacerla explícita. Es decir, presentarla a los alumnos como un concepto por sí mismo, con sus características y componentes propios.

Modelización Matemática

Existen diferentes explicaciones acerca del proceso de modelización matemática (Blomhøj, 2008; Villa, 2007; entre otros) que muestran las fases del proceso e interacciones entre ellas.

Blomhøj distingue seis “sub-procesos”: (a) Formulación del problema. (b) Sistematización. (c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático. (d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones. (e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial. (f) Evaluación de la validez del modelo. El autor aclara que no es un proceso lineal sino “cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición del modelo.” (Figura 1)

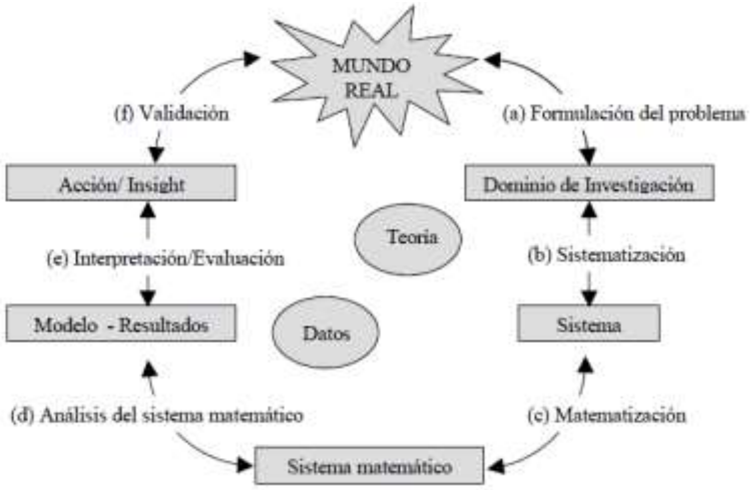

Figura 1. Modelo gráfico del proceso de modelización según Blomhøj.

Siguiendo a Villa, el proceso de modelización es un ciclo que comienza cuando se determina un fenómeno o problema del mundo real, el cual se observa y se somete a un proceso de experimentación para profundizar en su comprensión y en la búsqueda de datos, y con ello poder construir un modelo que lo represente. Luego se utilizan herramientas matemáticas para construir una solución y sacar conclusiones de dicho modelo, las que deben ser interpretadas a la luz del fenómeno. Si el modelo acuerda con el fenómeno, termina el ciclo; sino, se comienza de nuevo reajustándose los datos, las variables, reformándose el modelo y comenzando el ciclo nuevamente. (Figura 2)

Debemos distinguir entre la modelización matemática propiamente dicha, de aquella que podemos llevar a cabo en el aula con nuestros alumnos. Ésta última podríamos decir que es una “versión resumida” de la primera, ya que contiene la idea intrínseca de lo que es la modelización, pero está adaptada para que sea posible su realización en el ámbito escolar. Villa muestra los aspectos que diferencian ambos “tipos” de

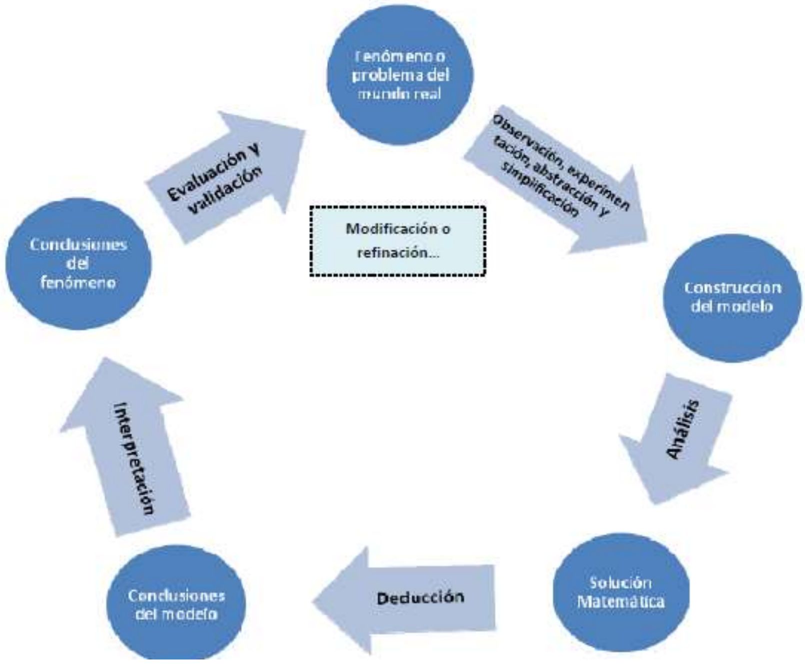

Figura 2. Momentos del proceso de modelización según Villa.

modelización, identificando a la primera como una actividad científica y a la segunda como herramienta para el aula de clase. Estas diferencias se muestran en la Tabla 1.

Criterio	**Como actividad científica**	**Como herramienta en el aula de clase**
Propósito del modelo	El modelo se construye para solucionar un problema de otras ciencias (naturales, sociales, humanas...) o avanzar en una teoría o ciencia.	El modelo se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo.
Los conceptos matemáticos	Emergen de la situación a través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno.	Deben haber sido considerados a priori con base en la preparación y selección del contexto por parte del maestro y de acuerdo con los propósitos de la clase.
Contextos	Obedecen a problemas que comúnmente no han sido abordados o se abordan de una manera diferente al interior de la ciencia.	Deben obedecer a problemas abordados previamente por el docente de la clase con el objeto de evaluar su pertinencia con los propósitos educativos.
Otros factores	Se presenta generalmente en un ambiente propio de la ciencia en la cual se aplica y generalmente es externo a factores educativos.	Se presenta regularmente en el aula de clase bajo una motivación propia de contextos cotidianos y de otras ciencias.

Tabla 1.

Entonces, la modelización vista como una herramienta en el aula, nos permitirá: construir conceptos matemáticos; resolver situaciones problemáticas planteadas en clase; motivar a los alumnos a aprender matemática; explicar, aplicar e integrar conceptos matemáticos. Estas ventajas nos muestran la importancia de ir incorporando actividades de modelización en la clase de matemáticas.

Competencias en la educación

El término competencia en el ámbito educativo se refiere a un concepto amplio que abarca e incluye a otros conceptos. Ser competente implica no sólo tener una cierta habilidad o destreza en realizar una acción sino también poseer los conocimientos teóricos que fundamentan tal capacidad. Además es muy importante la actitud de la persona ante la acción a realizar. Creemos que la definición de Lasnier (2000) se ajusta a lo que nosotros entendemos por competencia en educación. El autor la define como: "*Un saber hacer complejo resultado de la integración, movilización y adecuación de capacidades, habilidades y conocimientos utilizados eficazmente en situaciones que tengan un carácter común*"

La competencia Modelizar

En particular la "competencia matemática" es "*la capacidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticos en los cuales las matemáticas juegan o podrían jugar un rol*" (Niss, 1999). En otras palabras, poder "aplicar" las matemáticas cuando sea necesario, ya sea dentro o fuera del ámbito escolar, usando todo lo que sabemos y hemos aprendido, y poder relacionar esos conocimientos entre sí. El autor enumera ocho competencias matemáticas básicas, entre las que incluye la competencia *Modelizar* (o *Modelar*). Explica que esta competencia "incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado."

Se observa que la competencia *Modelizar* incluye la competencia *Plantear y resolver problemas* (Blomhøj, 2008) y guarda relación con otras competencias básicas generales como *Aprender a aprender; Autonomía e iniciativa personal;* y *Conocimiento e interacción con el mundo físico.* (Sierra Galdón, 2011). Siguiendo la lista de competencias de Niss, creemos que en un proceso de modelización se encuentran presentes también las competencias matemáticas: *Pensar y razonar*, *Comunicar*, y, *Utilizar lenguajes y operaciones simbólicas*; a su vez, pueden aparecer otras dos competencias: *Representar*, y, *Utilizar ayudas y herramientas*. Entonces, si nos centramos en la competencia *Modelizar*, podemos considerar a las anteriores como "sub-competencias" de ésta. Por lo tanto, la realización de actividades de modelización puede ayudar a desarrollar otras competencias, lo cual también justifica la necesidad de su inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estrategias para introducir la modelización en el aula

A continuación enumeramos algunas consideraciones a tener en cuenta al trabajar la modelización en clase. Creemos que la siguiente lista puede ayudar al docente guiándolo en la incorporación paulatina de la modelización.

1) Introducir como una "práctica común" la resolución de problemas en la clase. Si los alumnos están más acostumbrados a resolver problemas que ejercicios algebraicos, las actividades de modelización se incorporarán de manera más fácil y natural.
2) Introducir la noción de *modelización* y de *modelo* a través de problemas "tipo". Recomendamos comenzar con el modelo lineal y luego con el modelo cuadrático.
3) Presentar y explicar las etapas de un proceso de modelización completo. Nombrar cada fase y realizar un gráfico ilustrativo mostrando el ciclo. Puede ejemplificarse con un caso real resuelto, y reconocer en él cada etapa del proceso.
4) Buscar situaciones "cuasi-reales" y/o reales adaptadas para una clase de matemática, en las que haya que realizar algunas de las etapas del proceso de modelización detallado en el punto anterior. Esta etapa es sobre todo motivadora, por lo que debe tenerse especial cuidado en la selección de los problemas elegidos. En Bocco (2010) y Hoffmann (1990) pueden encontrarse interesantes y variados ejemplos.
5) Buscar situaciones reales, en las cuales haya que llevar a cabo todas (o la mayor cantidad posible) de las etapas del proceso de modelización, hasta la obtención y validación del modelo. Esta actividad puede servir como un proyecto de investigación, realizándose durante un tiempo más prolongado, e ir avanzando en los distintos encuentros de la materia.

Una experiencia en el aula

Teniendo en cuenta las sugerencias anteriores, y estando ya los alumnos bastante habituados a la resolución de problemas (punto 1 anterior), decidimos realizar una breve presentación en clase contando qué es la modelización matemática y sus características (punto 2). Luego les entregamos un trabajo para realizar en grupos de dos integrantes, en los que se enunciaban dos situaciones problemáticas, una basada en un modelo lineal y la otra en uno cuadrático. Los problemas fueron extraídos de Bocco (2010), y se les realizaron algunos cambios, agregando algunas preguntas y/o tareas. Cada grupo tenía diferentes problemas. El trabajo fue realizado por los alumnos fuera del horario de clase y entregado 10 días despúes (ver Anexos 1 y 2).

Los objetivos de este trabajo no sólo fueron introducir el concepto de modelización matemática, sino también, indagar acerca del desarrollo de la competencia Modelizar en los alumnos. Es decir, saber en qué nivel de desarrollo se encontraban, para poder luego, en una segunda instancia realizar actividades de modelización en caso de ser posible más avanzadas y más acordes a los contenidos específicos de la asignatura y de la carrera en general. Nos preguntamos entonces: ¿cómo determinar si los alumnos han logrado desarrollar la competencia Modelizar?

Aravena (2007), a fin de analizar los logros obtenidos por los alumnos en actividades de modelización, distingue dentro del proceso los siguientes pasos, cada uno con las tareas que involucra: (1) *Organización e interpretación del problema*, que incluye: identificación de los datos y condiciones; utilización de sistemas de representación, y reconocimiento e interpretación de variables que intervienen. (2) *Matematizar el problema*, que incluye: planteamiento de las ecuaciones matemáticas; utilización de algoritmos y propiedades; desarrollo de procesos algebraicos; determinación de dominio y recorrido, y formulación del modelo. (3) *Aplicación y verificación del modelo*. Establecer una relación entre los datos matemáticos y el problema real, es decir, someter las variables del modelo a datos de la realidad, si se ajusta a las condiciones, mediante la evaluación del modelo con nuevos datos del dominio. (4) *Comunicación matemática*. Dar una interpretación de los datos y de los conceptos desde el punto de vista del problema real. Interpretar datos a partir del modelo matemático.

En base a lo anterior identificamos las tareas a realizar por cada grupo en cada uno de los dos problemas dados, las cuales pueden verse en la Tabla 2.

	Problema del Modelo Lineal	*Problema del Modelo Cuadrático*
Matematizar el modelo	*- Hallar la expresión del modelo en base a datos proporcionados.* *- Reconocer e interpretar el papel de los parámetros en el modelo.* *- Indicar dominio y conjunto imagen.*	*- Reconocer e interpretar el papel de los parámetros en el modelo dado.* *- Indicar dominio y conjunto imagen.*
Aplicar y verificar el modelo	*- Aplicar el modelo para hallar valores específicos e interpretar su significado en el contexto del problema.* *- Considerar posibles cambios en los parámetros del modelo y evaluar las consecuencias que generan.* *- Graficar el modelo*	*- Aplicar el modelo para hallar valores específicos requeridos e interpretar su significado en el contexto del problema.* *- Responder cuestiones que atienden a la interpretación general del modelo.* *- Graficar el modelo.*

Tabla 2.

Luego de corregido y devuelto el trabajo a los alumnos, se les realizó una breve encuesta consultándolos acerca de las dificultades con las que se encontraron a la hora de resolver estos problemas. Los resultados de esa encuesta se muestran en el Gráfico 1.

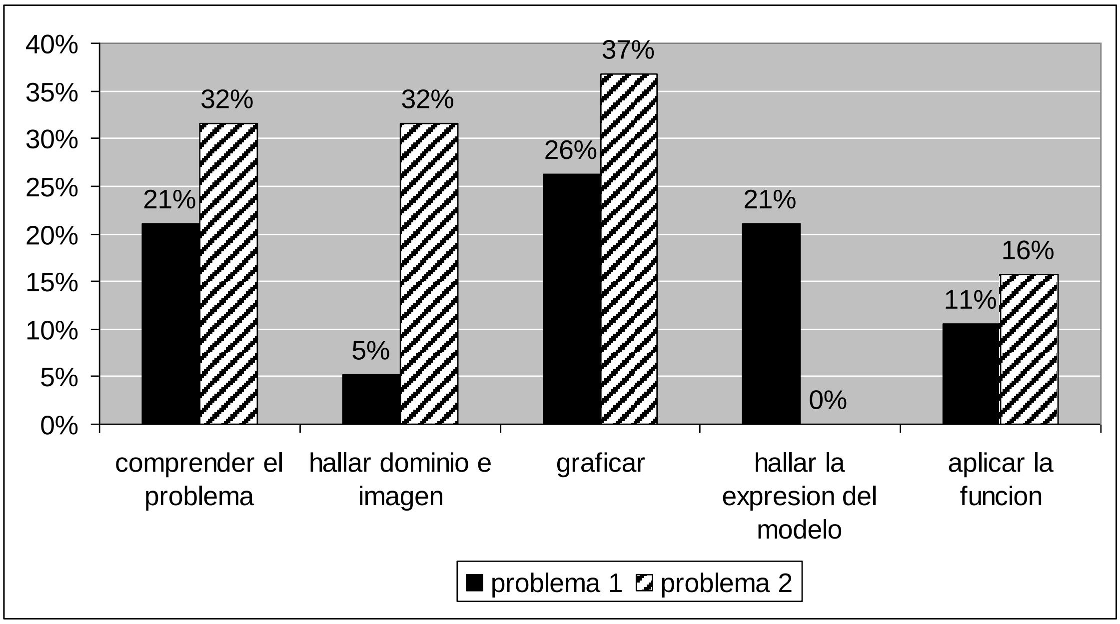

Gráfico 1.

Se observa que las mayores dificultades aparecieron en el problema 2, específicamente en realizar la gráfica de la función (7 alumnos de un total de 19), y en la comprensión del problema y hallar el dominio e imagen (6 alumnos de 19). Sólo 3 alumnos tuvieron dificultades en utilizar la función con valores dados, es decir, en aplicar el modelo.

En cuanto al problema 1 lo que más les costó fue también la gráfica (5 de 19 alumnos) y comprender el problema y escribir la expresión del modelo (4 de 19 alumnos).

Conclusiones

Las respuestas de los alumnos en la encuesta coincidieron con lo observado en la corrección y análisis de los trabajos. En el problema del modelo lineal (problema 1) fue difícil para varios llegar a escribir la expresión del modelo, y determinar cuál era exactamente el dominio e imagen para ese problema, es decir, acotar ambos conjuntos a esa situación. Están acostumbrados a que el dominio sean "todos los reales" y les cuesta ver que al aplicar la función lineal obtenida en un caso concreto la variable independiente no puede tomar todos los valores reales.

En cuanto al problema 2, en el cual el modelo cuadrático estaba dado, lo difícil fue también hallar el dominio e imagen y realizar la gráfica, acotando ambos conjuntos correctamente a la situación planteada.

Se observaron mayores dificultades en el problema 2 que en el 1, probablemente se deba a que un modelo lineal es más sencillo y conocido por los estudiantes que el cuadrático, y se ha trabajado en clase más con gráficos de rectas que con parábolas.

Creemos que esta actividad permitió realizar una introducción adecuada al tema, y ayudó a detectar los puntos donde hay que enfatizar e insistir para lograr que los alumnos puedan mejorar el desarrollo de la competencia Modelizar.

Resta ahora continuar en la misma dirección, llevando a la clase situaciones problemáticas adaptadas para que de a poco se vaya logrando realizar un proceso de modelización matemático completo, desde la recolección de datos hasta la puesta a prueba y discusión del modelo encontrado.

Bibliografía

Aravena, M., Caamaño, C. (2007). *Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile*. Rev.Estudios pedagógicos, ISSN 0716-050X, Nº. 2, 2007, págs. 7-25. Disponible en: http://www.scielo.cl/pdf/estped/v33n2/art01.pdf.

Blomhøj, M (2008). *Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica*. Revista de Educación Matemática de la FAMAF. pp. 20-35. ISSN: 1852-2882. Disponible en: http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf.

Bocco, M. (2010). *Funciones elementales para construir modelos matemáticos*. Colección Las Ciencias Naturales y la Matemática. Edit. Buenos Aires. Min. de Educación de la Nación. Instituto Nac. de Educ. Tecnológica. ISBN 978-950-00-0758-0

Hoffmann, L: (1990). *Cálculo aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales.* Editorial McGrawHill. México.

Lasnier, F. (2000). Réussir la formation par compétences. Guerin. Montreal, Canadá.

Niss, M. (1999). ***Competencies and Subject Description***. Uddanneise, 9, pp. 21-29.

Sierra Galdón, L; Blanco, M.; Garcia-Raffi, L.; Goméz U., J. (2011) *Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria*. 15 JAEM (Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas). Julio 2011, Gijón, España.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo.* Revista TecnoLógicas, 19, pp. 63-85. También disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/959/

Anexo 1.

Algunos de los problemas del modelo lineal entregados a los alumnos para su realización en grupo:

1.1) Un técnico de equipos de música cobra una tarifa fija de $45 por revisar el equipo y realizar un diagnóstico del problema que presenta. Luego, por cada hora de trabajo que le demanda su arreglo tiene estipulado una tarifa de $90.
a) Escribir una fórmula que describa la situación y describir cuáles son las variables relacionadas. b) Explicar el significado, en esta situación real, de los parámetros de la función. c) Graficar la función. d) Encontrar el número de horas que trabajaría el técnico por $225. e) Describir cómo variarían la función y su gráfico si el técnico no cobrara la tarifa fija de $45 y sólo el tiempo que le insume el arreglo del equipo. f) Describir cómo cambiarían la función y su gráfico si el técnico cobrara la tarifa fija de $45 y una tarifa de $70 por cada hora que le insume el arreglo del equipo de música.

1.2) Para una empresa ubicada en el sur del país, el costo de producir diariamente 30 televisores es de $25.000, y si su producción es de 40 unidades del mismo televisor es de $30.000. Sabiendo que el costo de producción C de la empresa está relacionado linealmente con la cantidad x de televisores diarios producidos y que la capacidad máxima de producción diaria es de 50 aparatos.
a) ¿Cuál es la función C(x) que permite describir los costos de producción? b) Estimar el costo de producir 35 unidades del mismo producto en un día. c) Si la empresa vende los televisores a $1.500 cada uno, ¿cuál es la función de ingreso I(x) si se supone también un comportamiento lineal de la misma? d) Estimar el ingreso por vender 35 unidades del mismo producto en un día. e) Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones, considerando que se pueden producir y vender hasta un total de 50 televisores diarios. Dar dominio e imagen de ambas. f) ¿Qué beneficio tendría la empresa si sólo produce y vende 10 televisores diarios? ¿Y si realiza y vende 6 televisores? g) ¿Le conviene a la empresa, siempre que pueda venderlos, producir a su máxima capacidad? Justificar la respuesta.

1.3) Para las compañías de aviación, es necesario estimar cuánto combustible necesitan los aviones para los vuelos. Por mediciones realizadas se conoce que un Boeing 727, que se abastece antes del despegue, contiene cerca de 28000 litros de combustible y usa cerca de 5000 litros por cada hora de vuelo. Si bien otros factores frecuentemente tienen efecto sobre el gasto de combustible, se puede considerar que la cantidad del mismo es, principalmente, función del tiempo de vuelo.
a) Plantear la fórmula del gasto de combustible en función del tiempo de vuelo. b) ¿Cuánto combustible le queda al avión después de 4 horas y media de vuelo? c) ¿Cuánto tiempo de vuelo ha realizado el avión en el momento en que consumió la mitad del combustible? d) ¿A qué tasa decrece el combustible del avión? Es decir, ¿cuál es el decrecimiento del combustible por cada hora adicional del vuelo? e) Si por seguridad un avión debe tener al menos 5000 litros de combustible, ¿qué tiempo de vuelo asegurado tenemos con la carga adicional? Plantea una fórmula del gasto de combustible en función del tiempo de vuelo, pero teniendo en cuenta este margen de seguridad. ¿Cambió con respecto a lo respondido en a)? Si la respuesta es sí, explicar por qué. f) Si el avión viaja a 800 km/h, ¿cuál es el viaje más largo que puede hacer, siempre considerando el margen de seguridad de 5000 litros? g) Graficar la función planteada en a) y la planteada en e), indicando dominio e imagen de cada una.

Anexo 2.

Algunos de los problemas del modelo cuadrático entregados a los alumnos para su realización en grupo:

2.1) Dentro del proceso iniciado de sembrado de truchas, en 2010 se introdujeron 100 individuos de esta especie en un lago ubicado en la zona cordillerana de Argentina, en el cual no había registros de su existencia. Al principio la población comenzó a crecer rápidamente, pero luego distintos factores, entre ellos la falta de alimentos, determinó un decrecimiento. El número de estos salmónidos para cada año t si consideramos t=0 al año 2010, se puede modelizar por: $S(t) = -t^2 + 15t + 100$

a) Dar el dominio y la imagen de la función S para este problema. b) Calcular la imagen de t=–2 y explicar su significado en este contexto. c) ¿En qué año la población de truchas fue máxima? En dicho año, ¿cuántos ejemplares había? d) ¿En qué año comenzó a decrecer la población de truchas? e) ¿En qué año se puede estimar que se extinguirá la población de truchas en el lago? f) Graficar la función.

2.2) El número A promedio de accidentes de tránsito registrados en un día para el país, en función de la edad x del conductor puede representarse por la función

$$A(x) = 0{,}45x^2 - 41x + 1059$$

a) ¿Cuál es el dominio de A en este problema, y cuál es la imagen? b) ¿Cuántos accidentes pueden calcularse que serán producto de jóvenes 18 años de edad conduciendo? c) Cuántos accidentes serán producto de conductores que tienen 70 años de edad? d) ¿A qué edad un conductor, según este modelo, tiene menor probabilidad de tener un accidente? e) ¿Cuántos accidentes pueden esperarse derivados de conductores de dicha edad? f) Graficar esta función.

2.3) Un pub abre y cierra cuando todos los clientes se han ido. A partir de registros mensuales se obtuvo una función que permite modelizar el número de personas que hay en el pub x horas después de su apertura, la misma es:

$$P(x) = 60x - 10x^2$$

a) Determinar el dominio y la imagen de P para este problema. b) Hallar el número máximo de personas que van a pub una determinada noche e indicar en qué horario se produce la máxima asistencia de clientes. c) Si queremos ir al pub cuando haya al menos 50 personas, ¿a qué hora tendríamos que ir? d) Si queremos estar sentados y el pub sólo tiene capacidad para 80 personas sentadas, ¿a partir de qué hora ya estamos seguros que no conseguiremos sillas? e) Graficar la función.